Análisis Matemático I

1. Prueba que:

   a) (0,75 puntos) Todo conjunto compacto de un espacio métrico es completo.

   b) (0,75 puntos) La imagen de una sucesión de Cauchy por una función uniformemente continua es una sucesión de Cauchy.

2. (1,5 puntos) Sea (E, d) un espacio métrico y $K \subset E$ un compacto no vacío. Prueba que hay elementos $a \in K$, $b \in K$ tales que $\operatorname{diam}(K) = \mathrm{d}(a, b)$.

3. (2 puntos) Estudia si el campo escalar definido por:

$$f(x, y) = \frac{x \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0$$

   es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$. Calcula $D_{12} f(0, 0)$ y $D_{21} f(0, 0)$ e indica si es de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

4. (2 puntos) Justifica, usando el teorema de la función implícita, que las igualdades:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x\,\mathrm{e}^v + yu - u^2 & = & 0 \\ y \cos v + x^2 - u^2 & = & 1 \end{array} \right.$$

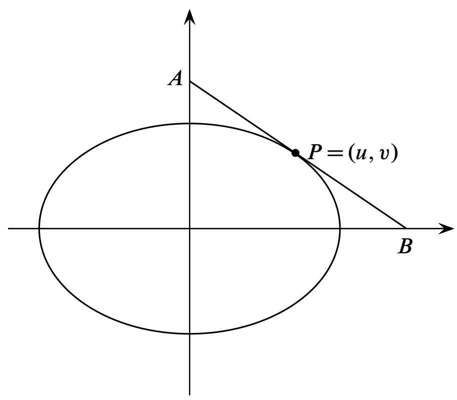
   definen a u y a v como funciones implícitas de x e y en un entorno del punto $(2, 1)$ siendo $u(2, 1) = 2$, $v(2, 1) = 0$. Calcula las derivadas parciales $D_{11} u(2, 1)$ y $D_{12} v(2, 1)$.

5. (2 puntos)

   Utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular un punto $P = (u, v)$ $(u > 0, v > 0)$ de la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

   tal que el segmento $\overline{AB}$ determinado por la intersección de la tangente a la elipse en dicho punto con los ejes coordenados tenga longitud mínima.



6. (1 punto)

   a) Regla de la cadena (versión general).

   b) Espacios tangente y normal en un punto de una variedad diferenciable.

Granada, 15 de septiembre de 2016